

層内に埋め込まれた発光膜からの光の電場

1. 序論

1.1 はじめに

発光膜から出てくる光には、通常の発光体では問題にならない因子がいくつか存在する。(1) 屈折・反射の法則を当てはめる際の発光部位の分布、(2) 誘電膜に被覆・担持あるいはサンドイッチされている場合それらの層の内部で起こる多重反射、(3) 発光がランダム（コヒーレンスを持たない）などときには、全反射による膜内部への閉じこめなどがある。例えば、屈折率が 1.5 の膜からの光は、空気中に出る界面への入射角が 60° を越えると外に出られない。等方的な発光に限っても、外部に出る界面への入射角が大きくなると、界面までの距離も長くなること、光のエネルギーは “電場の 2 乗/ $n_m \cos \theta_m$ ” であることにより、入射角の広がり $d\theta_m$ のドーナツの面積は $2\pi z \sin \theta_m d\theta_m$ であるが（ z : 発光点の界面からの深さ）この口は意外に小さい。本稿では、サンドイッチされた膜の内部で生成した光の電場が空気層に出てくる時の光電場を定式化する。

下で示すように、定式には層の数と同じ次元の行列及び逆行列が出てくる。ここでは実例として 3 層系を取り上げて説明する。ファイル「2 層膜和周波一般式」ではここで示すやり方と少しだけ違った方法が示されている。また、外部から光が入射しているときに内部に作られる光電場の表式については、ファイル「膜内の電場」に記してある。

1.2. 記号等の定義

反射係数・透過係数

付録 A に記すように、光が媒質 1 から媒質 2 に入射するとき、s 偏光の電場振幅及び p 偏光の電場振幅に対する反射係数及び透過係数を屈折率を使って表すと下のようになる。

$$r_{m,s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_m \cos \theta_m}{n_1 \cos \theta_1 + n_m \cos \theta_m}, \quad t_{m,s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_m \cos \theta_m} \quad (1.1a)$$

$$r_{m,p} = \frac{n_1 \cos \theta_m - n_m \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_m + n_m \cos \theta_1}, \quad t_{m,p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_m + n_m \cos \theta_1} \quad (1.1b)$$

$$t_{1m,a} t_{m1,a} = 1 + r_{1m,a} r_{m1,a} = 1 - r_{1m,a}^2 \quad (a = s, p) \quad (1.2)$$

なお、下付き文字については、反射係数 $r_{mm'}$ は媒質 m からの光が媒質 m' との界面で反射される時のものを意味し、透過係数 $t_{mm'}$ は媒質 m から媒質 m' に透過する時のものを意味する。即ち、

θ_m : 屈折率が m の膜を進む光の光路が界面で法線に対してなす角

$t_{mm'}$: 媒質- m 側から媒質- m' 側に透過する光の電場に対する透過係数。

$t_{m'm}$: 媒質- m' 側から媒質- m 側に透過する光の電場に対する透過係数。

$r_{mm'}$: 媒質- m 側から来て媒質- m' との界面で反射する光の電場に対する反射係数。

$r_{m'm}$: 媒質- m' 側から来て媒質- m との界面で反射する光の電場に対する反射係数。

上向き (-) 光・下向き (+) 光

多層膜系が無限の厚さを持つ媒質 1 と媒質 2 の間に置かれているとして、次のように定義する。

上向き (-) 光：屈折率が n_1 の媒質 1 に向かう方向に進む光

下向き (+) 光：屈折率が n_2 の媒質 2 に向かう方向に進む光

2. 一般式

観測方向である媒質 1 に出ていく直前の光（上向き光である）の振幅を考える。発光してからさまざまな界面での反射を経て出口に至るまでの経路を考えるに当たり、「透過」だけなら外に出られる上向き光の一部が反射によって下向き光に変わってしまい、さらにもう 1 回の反射によって上向き光に戻る過程の繰り返しの積み重ねを想定する。反射の回数が少ないものから出発して、回数を重ねたものをつけ加えるときに、「最後に下向き光から上向き光に反転する反射」が積み重ねによってどうなるかを考えてやると、次のようになる。但し、反転することなく透過だけで外に出てくる成分がある場合は、これを別途に加えることになる。

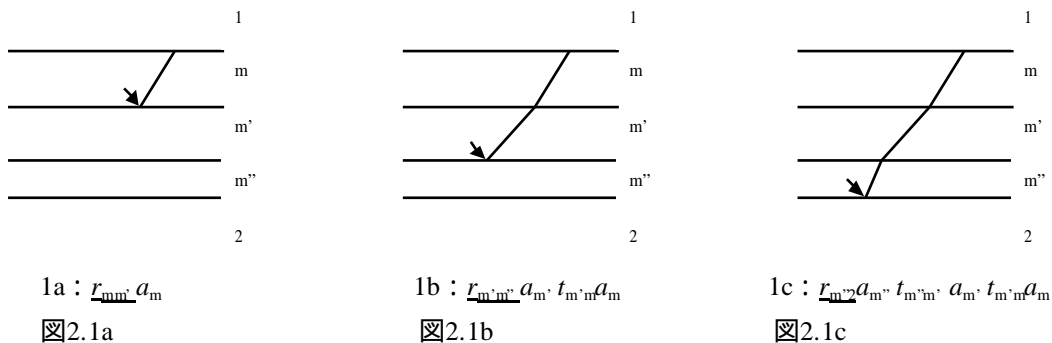
「最後に下向き光から上向き光に反転する反射」のしかたは積層の数と同じだけ存在する。

さらに反射が重なるときには、出口に至る途中の界面すべてが最初の反射面になり得るし、この反射面より下にある界面は 2 度目の反射をする表面になり得る。そして、この 2 度目の反射が、積み重ねをした後の光に対して「最後に下向き光から上向き光に反転する反射」になる。

「最後に下向き光から上向き光に反転する反射」に至るまでの過程について、積み重ねの前と後でどのように変化するかを式で表すことが出来、（膜層の数と同じ次元の）行列の等比級数になる。この等比級数が無限級数の時には、付録Bに記すように簡単化が狩野である。

このようにして進める計算のしかたを、出口から順に $1/m/m'/m''/2$ と並んだ 3 層系を使って説明しよう。

下は、3 個ある「最後に下向き光から上向き光に反転する反射」とそれに続く出口までの過程である。（この反射に至るまでの過程は示していない。）



$$a_m = e^{ik_m h_m} / \cos \theta_m, \quad a_{m'} = e^{ik_{m'} h_{m'}} / \cos \theta_{m'}, \quad a_{m''} = e^{ik_{m''} h_{m''}} / \cos \theta_{m''}$$

上の 3 つに次の「反射—反射」過程を重ねると、それぞれが次のようなセットを派生する。

1a : $r_{mm'}$ a_m からは ;

$$r_{mm'} r_{m1} a_m^2$$

$$\times \underline{r_{mm'}} a_m$$

$$r_{mm'} r_{m1} t_{mm'} a_m^2 a_m$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{mm'} r_{m1} t_{mm'} a_m, t_{m'm'} a_m, a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$$

1b : $\underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m$ からは ;

$$r_{m'm'} r_{m1} a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} \underline{t_{m'm'}} a_m, a_m^2 a_m$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} t_{m'm} a_m, a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} t_{m'm} t_{mm'} a_m, a_m^2 a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} t_{m'm} t_{mm'} t_{m'm'} a_m, a_m^2 a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$$

1c : $\underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$ からは ;

$$r_{m'm'} r_{m1} a_m^2$$

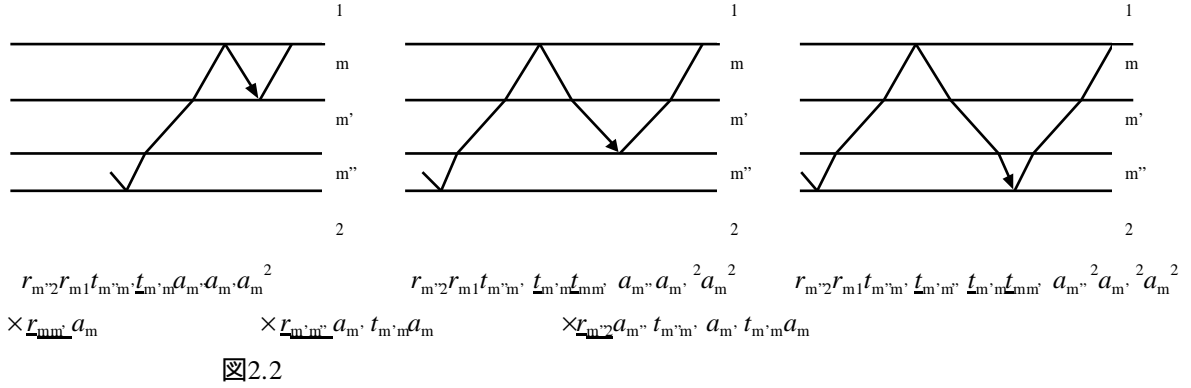
$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} t_{m'm} a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m$$

$$r_{m'm'} r_{m1} t_{m'm} t_{m'm'} a_m, a_m^2$$

$$\times \underline{r_{m'm'}} a_m, t_{m'm} a_m, t_{m'm} a_m$$



最短光路で出口に至る光の電場振幅として下の3つを考えることができる。

$$x_0 L_{m'm} a_m, \quad y_0 L_{m'm'} a_m t_{m'm} a_m, \quad z_0 L_{m''} a_m t_{m'm} a_m t_{m'm} a_m \quad (2.1)$$

さらに n 回の2重反射を重ねた光路を経て出口に達する光の振幅は下のように表すことができる。

$$x_n L_{m'm} a_m, \quad y_n L_{m'm'} a_m t_{m'm} a_m, \quad z_n L_{m''} a_m t_{m'm} a_m t_{m'm} a_m \quad (2.2)$$

これにもう一つの2重反射が重なったものを $x_{n+1} L_{m'm} a_m, y_{n+1} L_{m'm'} a_m t_{m'm} a_m, z_{n+1} L_{m''} a_m t_{m'm} a_m t_{m'm} a_m$ と置くと、係数 $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ と x_n, y_n, z_n は下の関係に従うことを上の図から理解できるであろう。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_m & r_{m1} r_{m''} t_{m'm} a_m a_m^2 & r_{m1} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} a_m a_m a_m^2 \\ \alpha_m t_{m'm} a_m & \alpha_{m'} + \beta_{m'm'} & (r_{m'm} r_{m''} t_{m'm} a_m a_m^2 \\ & & + r_{m1} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} t_{m'm} a_m a_m^2 a_m^2) \\ \alpha_m t_{m'm} t_{m'm'} a_m a_m & (\alpha_{m'} + \beta_{m'm'}) t_{m'm'} a_m & \alpha_{m''} + \beta_{m'm''} + \gamma_{m'm''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_m & r_{m1} r_{m''} t_{m'm} a_m a_m^2 & r_{m1} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} a_m a_m a_m^2 \\ \alpha_m t_{m'm} a_m & \alpha_{m'} + \beta_{m'm'} & (r_{m'm} r_{m''} t_{m'm} a_m a_m^2 \\ & & + r_{m1} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} t_{m'm} a_m a_m^2 a_m^2) \\ \alpha_m t_{m'm} t_{m'm'} a_m a_m & (\alpha_{m'} + \beta_{m'm'}) t_{m'm'} a_m & \alpha_{m''} + \beta_{m'm''} + \gamma_{m'm''} \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}^{n+1} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

但し、

$$\begin{aligned} \alpha_m &= r_{m1} r_{m1} a_m^2, \quad \alpha_{m'} = r_{m'm} r_{m'm} a_m^2, \quad \alpha_{m''} = r_{m'm} r_{m''} a_m^2, \\ \beta_{m'm'} &= r_{m1} r_{m'm} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m^2, \quad \beta_{m'm''} = r_{m'm} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m^2, \\ \gamma_{m'm''} &= r_{m1} r_{m''} t_{m'm} t_{m'm} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m^2 a_m^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

よって、出口直下に出来るネットの電場振幅は次のように表される。

$$E_{net}^- = (r_{mm} a_m, r_{m'm'} t_{m'm} a_m a_m, r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} a_m a_m a_m) [E + A + A^2 + \dots] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

付録 B により、右辺の行列 A のすべての行列要素の絶対値が 1 より小さいときには、上式右辺の行列の和は $(E - A)^{-1}$ になる。よって、ネットの電場は (ゼロ次項から寄与する場合には) 下のようになる。

$$E_{net}^- = (r_{mm} a_m, r_{m'm'} t_{m'm} a_m a_m, r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} a_m a_m a_m) [E - A]^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

逆行列 $(E - A)^{-1}$ は下のようになる。

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 - \alpha_m - \alpha_m - \beta_{mm} - \beta_{m'm'} - \gamma_{mm} & (1 - \alpha_m - \beta_{m'm'} - \gamma_{mm}) r_{m1} r_{m'm'} t_{m'm} a_m a_m^2 \\ + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \alpha_m & + (\alpha_m + \beta_{mm}) r_{m1} r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m^2 \\ + \alpha_m \beta_{m'm'} + \alpha_m \beta_{mm} - \alpha_m \alpha_m \alpha_m & \\ (\alpha_m - \alpha_m \alpha_m) t_{m'm} a_m & 1 - \alpha_m - \beta_{m'm'} - \gamma_{mm} + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \beta_{m'm'} \\ \alpha_m t_{m'm} t_{m'm'} a_m a_m & (\alpha_m + \beta_{mm} - \alpha_m \alpha_m) t_{m'm} a_m \\ r_{mm} r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} a_m a_m a_m^2 & \\ (1 - \alpha_m) r_{m'm} r_{m''2} t_{m''m} a_m a_m & \\ + r_{m1} r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} t_{m'm} a_m a_m^2 a_m^2 & \\ 1 - \alpha_m - \alpha_m - \beta_{mm} - \alpha_m \alpha_m & \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\Delta = 1 - \alpha_m - \alpha_m - \alpha_m - \beta_{mm} - \beta_{m'm'} - \gamma_{mm} + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \beta_{m'm'} + \alpha_m \beta_{mm} - \alpha_m \alpha_m \alpha_m \\ = (1 - r_{m1} r_{mm} a_m^2) (1 - r_{m'm'} r_{m''2} a_m^2) - (r_{m'm} + r_{m1} a_m^2) (r_{m'm'} + r_{m''2} a_m^2) a_m^2 \quad (2.8)$$

よって、

$$(r_{mm} a_m, r_{m'm'} t_{m'm} a_m a_m, r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} a_m a_m a_m) [E - A]^{-1} \\ = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_m - \alpha_m - \beta_{mm} - \beta_{m'm'} - \gamma_{mm} + \alpha_m \alpha_m + \alpha_m \beta_{mm}) r_{m'm} a_m \\ + (\alpha_m - \alpha_m \alpha_m) r_{m'm'} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m + \alpha_m r_{m''2} t_{m''m} t_{m'm} t_{m'm} a_m^2 a_m^2 a_m \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 - \alpha_{m''} - \beta_{m'm''} - \gamma_{mm''} - \alpha_m \gamma_{mm''}) r_{m'm''} t_{m'm} t_{mm} a_{m'} a_m \\ & + (\alpha_{m'} + \beta_{mm'} + \alpha_m \beta_{mm'}) r_{m''2} t_{m'm''} t_{m'm} t_{m'm} a_{m''}^2 a_{m'} a_m, \quad r_{m''2} t_{m'm''} t_{mm} a_{m''} a_{m'} a_m \end{aligned} \right] \quad (2.9)$$

考慮する光の発光部位（ m 層からの発光、 m' 層からの発光、 m'' 層からの発光）及び発光の方向（下向き光か上向き光か）を定めると対応する x_0 、 y_0 、 z_0 が求められるので、(2.6) 式と (2.9) 式を使って必要な電場振幅を計算することが可能である。

2.1. m 層からの発光

$1/m$ 界面から深さ z_m の点で起こる発光を考えてみよう。便宜上、上向き光及び下向き光が最初の界面に到達するまでに受ける位相の変化を次のように表す。

$$a_{m0} = e^{ik_m z_m} / \cos \theta_m, \quad a_{m0}^* = e^{ik_m (h_m - z_m)} / \cos \theta_m \quad (2.10)$$

下向き光に対しては、

$$x_0 = E^+(z_m) a_{m0}^*, \quad y_0 = E^+(z_m) a_{m0}^* t_{mm'} a_{m'}, \quad z_0 = E^+(z_m) a_{m0}^* t_{mm''} t_{m'm''} a_{m''} a_m,$$

であり、上向き光に対しては、

$$x_0 = E(z_m) a_{m0} r_{m1} a_m, \quad y_0 = E(z_m) a_{m0} r_{m1} t_{mm'} a_{m'} a_m, \quad z_0 = E(z_m) a_{m0} r_{m1} t_{mm''} t_{m'm''} a_{m''} a_m a_m$$

であるから、上向き光に対しては反射をしないまま出てくる成分 $-E^-(z_m) a_{m0}$ があることに注意した上で、(2.6) 式と (2.9) 式を使うと下を得る。

$$\begin{aligned} E^-(0^-)_1 = & \frac{t_{m1}}{(1 - r_{m1} r_{mm0} a_m^2) (1 - r_{m0m0} r_{m02} a_m^2) - (r_{m0m} + r_{m1} a_m^2) (r_{m0m0} + r_{m02} a_m^2) a_m^2} \\ & \times \{ E^+(z_m) a_{m0}^* [(r_{mm'} + r_{m'm'} a_m^2) + (r_{mm''} r_{m'm''} + a_m^2) r_{m''2} a_m^2] \\ & + E^-(z_m) a_{m0} [1 + r_{mm'} r_{m'm'} a_m^2 + (r_{mm''} + r_{mm''} a_m^2) r_{m''2} a_m^2] \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

なお、上の計算で、 α_m 、 $\alpha_{m'}$ 、 $\alpha_{m''}$ 、 $\beta_{mm'}$ 、 $\beta_{m'm'}$ 、 $\gamma_{mm''}$ の表式及び (1.2) 式の関係を使った書き換えを駆使して最後の表式を得ている。一般に、 $E^+(z_m)_{x,y} = E^-(z_m)_{x,y}$ 、 $E^+(z_m)_z = -E^-(z_m)_z$ 、etc. が成り立つ。

発光がコヒーレントな場合には、 $E^+(z_m)$ に対しては z についてゼロから h_m まで、 $E^-(z_m)$ に対しては z について h_m からゼロまで積分してから 2 乗を取って光の強度にする。発光がコヒーレントではない場合には、 $E^+(z_m)$ と $E^-(z_m)$ の和の 2 乗を先ず取ってから z についてゼロから h_m まで積分したものを光の強度にする。

2.2. m' 層からの発光

m/m' 界面から深さ $z_{m'}$ の点で起こる発光を考えよう。上向き光及び下向き光が最初の界面に到達するまでに受ける位相の変化を次のように表す。

$$a_{m'0} = e^{ik_m z_{m'}} / \cos \theta_{m'}, \quad a_{m'0}^* = e^{ik_m (h_{m'} - z_{m'})} / \cos \theta_{m'} \quad (2.12)$$

下向き光に対しては、

$$x_0 = 0, \quad y_0 = E^+(z_{m'}) a_{m'0}^*, \quad z_0 = E^+(z_{m'}) a_{m'0}^* t_{m'm'} a_{m'}$$

上向き光に対しては、

$$x_0 = E^-(z_{m'}) a_{m'0} r_{m1} t_{m'm'} a_{m'}^2, \quad y_0 = E^-(z_{m'}) a_{m'0} (r_{m'm'} a_{m'} + r_{m1} t_{m'm'} t_{m'm'} a_{m'}^2 a_{m'}),$$

$$z_0 = E^-(z_{m'}) a_{m'0} (r_{m'm'} t_{m'm'} a_{m'} a_{m'} + r_{m1} t_{m'm'} t_{m'm'} t_{m'm'} a_{m'} a_{m'} a_{m'}^2)$$

であるから、上向き光に対しては反射をしないまま出てくる成分 — $E^-(z_{m'}) a_{m'0} t_{m'm'} a_{m'}$ — があることに注意した上で、(2.6) 式と (2.9) 式を使うと下式が得られる。

$$E^-(0^-)_1 = \frac{t_{m1}}{(1 - r_{m1} r_{m'm'} a_{m'}^2) (1 - r_{m'0m'} r_{m'02} a_{m'}^2) - (r_{m'0m'} + r_{m'02} a_{m'}^2) (r_{m'0m'} + r_{m'02} a_{m'}^2) a_{m'0}^2}$$

$$\times [E^+(z_{m'}) a_{m'0}^* (r_{m'm'} + r_{m'02} a_{m'}^2) a_{m'} + E^-(z_{m'}) a_{m'0} (1 + r_{m'm'} r_{m'02} a_{m'}^2)] t_{m'm'} a_{m'} \quad (2.13)$$

光強度については前節の終わりに記したことに準じる。

2.3. m' 層からの発光

m'/m'' 界面から深さ $z_{m''}$ の点で起こる発光を考えよう。上向き光及び下向き光が最初の界面に到達するまでに受ける位相の変化を次のように表す。

$$a_{m''0} = e^{ik_{m''} z_{m''}} / \cos \theta_{m''}, \quad a_{m''0}^* = e^{ik_{m''} (h_{m''} - z_{m''})} / \cos \theta_{m''} \quad (2.14)$$

下向き光に対しては、

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = E^+(z_{m''}) a_{m''0}^*$$

上向き光に対しては、

$$x_0 = E^-(z_{m''}) a_{m''0} r_{m1} t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'} a_{m'}^2, \quad y_0 = E^-(z_{m''}) a_{m''0} (r_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'}^2 + r_{m1} t_{m'm''} t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'}^2 a_{m'}^2),$$

$$z_0 = E^-(z_{m''}) a_{m''0} (r_{m'm''} a_{m'} + r_{m1} t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'} a_{m'}^2 + r_{m1} t_{m'm''} t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'} a_{m'}^2 a_{m'}^2)$$

であるから、上向き光に対しては反射をしないまま出てくる成分 — $E^-(z_{m''}) a_{m''0} t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'} a_{m'}$ — があることに注意した上で、(2.6) 式と (2.9) 式を使うと下式が得られる。

$$E^-(0^-)_1 = \frac{t_{m1}}{(1 - r_{m1} r_{m'm''} a_{m'}^2) (1 - r_{m'0m''} r_{m'02} a_{m'}^2) - (r_{m'0m''} + r_{m'02} a_{m'}^2) (r_{m'0m''} + r_{m'02} a_{m'}^2) a_{m'0}^2}$$

$$\times [E^+(z_{m''}) a_{m''0}^* r_{m'02} a_{m'} + E^-(z_{m''}) a_{m''0}] t_{m'm''} t_{m'm''} a_{m'} a_{m'} \quad (2.15)$$

光強度については 2.1 節の終わりに記したことに準じる。

付録 A . 線形光学の主な関係式

周波数 ω の平面波が時刻 t 、位置 r で持つ電場ベクトル $E_w(r, t)$ は、指数関数を使って下式で表される。

$$E_w(r, t) = E_w^0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c. c.} \quad (\text{A.1})$$

上式で、 k は波動ベクトル、c. c. は直前の項の複素共役を表す。 $\exp(\pm i\alpha) = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$ により上式は実数になる。(A.1) 式は、単一の周波数で振動する平面波に対して、マクスウェル方程式に出てくる微分演算子 ∇ を波動ベクトル k で置き換えられることを使って導かれる。波長を λ 、屈折率を n 、誘電率を ε とするとき、次の関係式が成り立つ。

$$k = 2\pi/\lambda = 2n\pi/\lambda_0, \quad c = \omega/k_0, \quad \varepsilon = c^2 k^2 / \omega^2, \quad n^2 k = c k / \omega. \quad (\text{A.2})$$

(下付きの 0 は真空中における値を示す。)

吸収を持つ媒質では、次の表式が使われる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + 4\pi\chi, \quad \chi = \chi' + i\chi'', \\ n &= n(1 + i\kappa), \quad n^2(1 - \kappa^2) = \mu + 4\pi\mu\chi', \quad n^2\kappa = 2\pi\mu\chi'' \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(κ : attenuation index, extinction index)

金属に対しては、いくつか異なる屈折率の表示方式がある。たとえば、Born & Wolf の教科書では $n(1 + i\kappa)$ 、APS のハンドブックでは $n - ik$ と表す。このように、虚数部の符号に 2 つの取り方があるのである。いずれにしる、金属表面に複素屈折率を与えれば、Snell の法則を適用することができる。

Snell の法則を使うときに定義される屈折率 n_2 と屈折角 θ_2 を複素数にして、下のような定義が Born & Wolf の教科書には示されている。下付き 1、2 が付いたものは入射側と透過側の値を示す。金属表面の屈折率を下のように置き、空気の屈折率を 1 とする；

$$n_2 = n_2(1 + i\kappa_2) = n_2 + i n_2\kappa_2 \quad (\text{A.4})$$

$$n_2 \cos\theta_2 = u_2 + i v_2 \quad (\text{A.5})$$

但し、 u_2 と v_2 は下式で定義される実数 ($u_2, v_2 \in \mathbb{R}$) である。

$$u_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ [n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1^2] + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1^2]^2 + 4n_2^2 \kappa_2^2} \right\} \quad (\text{A.6a})$$

$$v_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ -[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1^2] + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1^2]^2 + 4n_2^2 \kappa_2^2} \right\} \quad (\text{A.6b})$$

反射と屈折

界面における光の反射と屈折を考えると、屈折角に対して Snell の法則、反射率・透過率に対して Fresnel の係数を用いる。これらはいずれも界面での境界条件から導かれる。即ち、

k 、 E 、 H ベクトルの面内成分は、界面の両側で等しい。

$D (= \epsilon E)$ 、 $B (= \mu H)$ ベクトルの法線成分は、界面の両側で等しい。

この時に、入射側界面の光については入射光と反射光のベクトルのベクトル和を、透過側界面の光については透過光のベクトルだけを取る。また、薄膜などで反対面からの反射光が入射光に重畳する場合には、それからの寄与（即ち膜内で多重反射している光の電場）も加えたものに対して境界条件を適用する。

[反射係数・透過係数]

別ファイル「フレネル係数など」で示すように、入射光を s 偏光と p 偏光の 2 種類に分けて考え、入射光の振幅 E_s^i 、 E_p^i に対する反射光および透過光の振幅 (E_s^r 、 E_p^r 、 E_s^t 、 E_p^t) の相対比（振幅反射係数、透過係数）を求めると、次のようになる。（電場振幅の下付き文字は偏光方向を表し、上付き文字は入射光 (i)、反射光 (r)、透過光 (t) の区別を表す。振幅反射率および透過率では偏光方向を上付きで表しており、下付きは左側が光が入る側の媒質、右側が透過する側の媒質を表す。）

(反射係数)

$$\begin{aligned} r_{12}^s &= E_r^s/E_i^s = (k_{1z} - k_{2z})/(k_{1z} + k_{2z}) = (n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2)/(n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2) \\ &= -\sin(\theta_1 - \theta_2)/\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ r_{12}^p &= E_r^p/E_i^p = (\epsilon_1 k_{2z} - \epsilon_2 k_{1z})/(\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}) = (n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1)/(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2) \\ &= -\tan(\theta_1 - \theta_2)/\tan(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(透過係数)

$$\begin{aligned} t_{12}^s &= E_t^s/E_i^s = 2k_{1z}/(k_{1z} + k_{2z}) = 2n_1 \cos \theta_1/(n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2) \\ &= 2\cos \theta_1 \sin \theta_2/\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ t_{12}^p &= E_t^p/E_i^p = 2\epsilon_1 k_{2z} \cos \theta_1/(\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}) = 2n_1 \cos \theta_1/(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2) \\ &= 2\cos \theta_1 \sin \theta_2/\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(本稿では、 r_{12}^p の符号が Born & Wolf の教科書の出ている式と逆になっている。これは、入射角がブリュスター角以下のときの電場の面内成分—x, y 成分—に対する符号が同じになるようにしたためである。)

ϵ と k を使った表式は、吸収がある媒質や金属表面での反射を扱うときに有用である。

逆向きに媒質 2 から媒質 1 へと進む光に対しては下式が成り立つ。

$$r_{21}^s = -r_{12}^s, \quad r_{21}^p = -r_{12}^p \quad (\text{A.9a})$$

$$t_{21}^s = (n_2 \cos \theta_2/n_1 \cos \theta_1)t_{12}^s, \quad t_{21}^p = (n_2 \cos \theta_2/n_1 \cos \theta_1)t_{12}^p \quad (\text{A.9b})$$

界面の内向き法線を z 軸に、s-偏光の電場の方向に y 軸を、光の進行方向が正になるように x 軸を定義して、電場の軸方向成分に対する係数を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E_{x,i} &= E_p^i \cos \theta_1, & E_{y,i} &= E_s^i, & E_{z,i} &= -E_p^i \sin \theta_1 \\ E_{x,r} &= E_p^r \cos \theta_1, & E_{y,r} &= E_s^r, & E_{z,r} &= E_p^r \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$E_{x,t} = E_t^p \cos \theta_2, \quad E_{y,t} = E_t^s, \quad E_{z,t} = -E_t^p \sin \theta_2$$

これより下を得る。

$$r_{12}^x = r_{12}^p, \quad r_{12}^y = r_{12}^s, \quad r_{12}^z = -r_{12}^p, \quad (\text{A.10a})$$

$$r_{21}^x = -r_{12}^p, \quad r_{21}^y = -r_{12}^s, \quad r_{21}^z = r_{12}^p, \quad (\text{A.10b})$$

$$t_{12}^x = (\cos \theta_2 / \cos \theta_1) t_{12}^p, \quad t_{12}^y = t_{12}^s, \quad t_{12}^z = (\sin \theta_2 / \sin \theta_1) t_{12}^p = (n_1 / n_2) t_{12}^p \quad (\text{A.11a})$$

$$t_{21}^x = (n_2 / n_1) t_{12}^p, \quad t_{21}^y = t_{12}^s, \quad t_{21}^z = (\cos \theta_2 / \cos \theta_1) (n_2 / n_1) t_{12}^p \quad (\text{A.11b})$$

上式は次の関係式を満足する。

$$\begin{aligned} 1 + r_{12}^x &= t_{12}^x, \quad 1 + r_{12}^y = t_{12}^y, \quad 1 + r_{12}^z = (n_2 / n_1)^2 t_{12}^z \quad (\text{電場に対する境界条件}) \\ 1 + r_{12}^s r_{21}^s &= 1 - (r_{12}^s)^2 = t_{12}^s t_{21}^s, \quad 1 + r_{12}^p r_{21}^p = 1 - (r_{12}^p)^2 = t_{12}^p t_{21}^p \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

因みに、光の強度は $n E^2 \cos \theta$ に比例するので、 $n_1 \cos \theta_1 r_{12}^2 + n_2 \cos \theta_2 t_{12}^2 = n_1 \cos \theta_1$ となり、光の強度は保存される。

付録 B：行列の等比級数

2章で示したように、1/m/m 系における SFG 光の取扱いに際して 2次元行列の等比級数の和が出てくる。ここでは、その和の表式を求める。

単位行列を E 、一般の行列を A としよう。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

行列の掛け算により、次の関係式が成立することは容易に示される。

$$E - A^2 = (E - A)(E + A) \quad (\text{B.2})$$

$$E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2) \quad (\text{B.3})$$

いま、行列式 $|E - A|$ がゼロでない値を持つ、即ち、行列 $E - A$ は逆行列 $(E - A)^{-1}$ を持つとすれば、下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E - A^{n+1} &= (E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^n) \\ E + A + A^2 + \dots + A^n &= (E - A)^{-1}(E - A^{n+1}) \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

このときには、 $A^{n+1} = (E - A)^{-1}(E - A)A^{n+1}$ であるから、下式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E + A + A^2 + \dots + A^n + A^{n+1} &= (E - A)^{-1}(E - A^{n+1}) + A^{n+1} \\ &= (E - A)^{-1}[E - A^{n+1} + (E - A)A^{n+1}] \end{aligned}$$

$$= (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^{n+2}) \quad (\text{B.5})$$

行列 \mathbf{A} の行列要素のすべてについて、絶対値が1より小さいときには、行列 \mathbf{A}^n はゼロに収束する。
よって、
下の公式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{when } |A_{ij}| < 1 \text{ for all } i \text{ and } j) \quad (\text{B.6})$$