二層膜からの和周波(SFG)光 — 一般式

ファイル「膜からの和周波発生」の延長として、膜層の数が２個のときの表式を求めておく。（３層以上になるとテンソルの級数になるので複雑すぎる。）

1. 係数等

反射係数及び透過係数

電場を表面固定座標系の成分で表すときに、反射係数及び透過係数は下のようになることを使って、座標成分を表している。

$$r_{1m,s} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_m\cos\theta_m}{n_1\cos\theta_1 + n_m\cos\theta_m}, \qquad t_{1m,s} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_m\cos\theta_m}$$

$$r_{1m,p} = \frac{n_1\cos\theta_m - n_m\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_m + n_m\cos\theta_1}, \qquad t_{1m,p} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_m + n_m\cos\theta_1}$$

$r_{1m,x} = -r_{m1,x} = r_{1m,p}$, $r_{1m,y} = -r_{m1,y} = r_{1m,s}$, $r_{1m,z} = -r_{m1,z} = -r_{1m,p}$

$r_{2m,x} = -r_{m2,x} = r_{2m,p}$, $r_{2m,y} = -r_{m2,y} = r_{2m,s}$, $r_{2m,z} = -r_{m2,z} = -r_{2m,p}$

$t_{1m,x} = (\cos\theta_m/\cos\theta_1)t_{1m,p}$, $t_{1m,y} = t_{1m,s}$, $t_{1m,z} = (\sin\theta_m/\sin\theta_1)t_{1m,p}$

$t_{m1,x} = (\cos\theta_1/\cos\theta_m)t_{m1,p}$, $t_{m1,y} = t_{m1,s}$, $t_{m1,z} = (\sin\theta_1/\sin\theta_m)t_{m1,p}$

$t_{2m,x} = (\cos\theta_m/\cos\theta_2)t_{2m,p}$, $t_{2m,y} = t_{2m,s}$, $t_{2m,z} = (\sin\theta_m/\sin\theta_2)t_{2m,p}$

$t_{m2,x} = (\cos\theta_2/\cos\theta_m)t_{m2,p}$, $t_{m2,y} = t_{m2,s}$, $t_{m2,z} = (\sin\theta_2/\sin\theta_m)t_{m2,p}$

$t_{1m,\alpha}t_{m1,\alpha} = 1 + r_{1m,\alpha}r_{m1,\alpha} = 1 - r_{1m,\alpha}^2$, $t_{2m,\alpha}t_{m2,\alpha} = 1 + r_{2m,\alpha}r_{m2,\alpha} = 1 - r_{2m,\alpha}^2$, $(\alpha = x, y, z)$

L　係数、電場振幅

L　係数とは、分極とそれから生成する光の電場振幅を関係づける係数である。

$$E_{SF,\alpha} = \sum_\beta L_{\alpha\beta}P_\beta^{SF}$$

一般化された Snell の屈折式により、生成する SFG 光は 上向き (-) 光と下向き (+) 光の両方になる。また、分極が存在する部位によって L 係数の表式が違う。もともと導かれた式は、無限に薄い薄膜 m が分極して、そこから媒質１と媒質２に出てくる光を考えたものであって、s 偏光と p 偏光の電場振幅を分極の x、y、z 成分とつなげるものであるが、ここでは、これを拡張して考える。また、共通因子である $4\pi i\omega_{SF}/c$ （屈折率の代わりに波数ベクトルを使うときには $4\pi i\omega_{SF}^2/c^2$）を省略する。

L 係数の表記法；$\boldsymbol{L_{i/j,s(p),\alpha}}$：分極シート m 'が i 層と j 層に挟まれているときに、分極の α 成分 (α = x, y, z) が作る光の s 偏光又は p 偏光成分の間の係数。上向き (-) 光と下向き (+) 光を上付き - と + で区別する。

媒質１と積層膜 m の間の分極 シート m' からの光生成に対しては、

$L^-_{1/m,p,x} = \cos\theta_{m,SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF})$

$L^-_{1/m,s,y} = 1/(n_{1,SF}\cos\theta_{1,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^-_{1/m,p,z} = (n_m/n_{m'})\sin\theta_{m',SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF}) = (n_m/n_{m'})^2\sin\theta_{m,SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF})$

$L^{+}_{1/m,p,x} = \cos\theta_{1,SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF})$

$L^{+}_{1/m,s,y} = 1/(n_{1,SF}\cos\theta_{1,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^{+}_{1/m,p,z} = -(n_1/n_{m'})\sin\theta_{m',SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF}) = -(n_1/n_{m'})^2\sin\theta_{1,SF}/(n_{1,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{1,SF})$

媒質２と積層膜 m の間の分極 シート m'' からの光生成に対しては、

$L^{-}_{2/m,p,x} = \cos\theta_{2,SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF})$

$L^{-}_{2/m,s,y} = 1/(n_{2,SF}\cos\theta_{2,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^{-}_{2/m,p,z} = (n_2/n_{m''})\sin\theta_{m'',SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF}) = (n_2/n_{m''})^2\sin\theta_{2,SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF})$

$L^{+}_{2/m,p,x} = \cos\theta_{m,SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF})$

$L^{+}_{2/m,s,y} = 1/(n_{2,SF}\cos\theta_{2,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^{+}_{2/m,p,z} = -(n_m/n_{m''})\sin\theta_{m'',SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF}) = -(n_m/n_{m''})^2\sin\theta_{m,SF}/(n_{2,SF}\cos\theta_{m,SF} + n_{m,SF}\cos\theta_{2,SF})$

積層膜内部の分極 シートからの光生成に対しては、

$L^{-}_{m/m,p,x} = L^{+}_{m/m,p,x} = \cos\theta_{m,SF}/(2n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^{-}_{m/m,s,y} = L^{+}_{m/m,s,y} = 1/(2n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

$L^{-}_{m/m,p,z} = -L^{+}_{m/m,p,z} = \sin\theta_{m,SF}/(2n_{m,SF}\cos\theta_{m,SF})$

2. 二層系 (1/m'/m/2) からの SFG

2.1. 要約

以下で使う記号を次のように定義する。

（最初の界面に達するまでの位相変化）

$a_0 = \exp(iz_1/\cos\theta_{m'})$, $a^*_0 = \exp[i(h_{m'} - z_1)/\cos\theta_{m'}]$

$b_0 = \exp(iz_1/\cos\theta_{m'})$, $b^*_0 = \exp[i(h_{m'} - z_1)/\cos\theta_{m'}]$

（ここで、* が付いた量は複素共役を意味しないことに注意したい。）

（多重反射におけるユニット）

$\alpha = r_{m'1}r_{m'm}a^2$, $a = \exp(ih_{m'}/\cos\theta_{m'})$,

$\beta = r_{m'1}t_{m'm}r_{m2}t_{mm'}a^2b^2$,

$\gamma = r_{m2}r_{mm'}b^2$, $b = \exp(ih_m/\cos\theta_m)$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta+\gamma \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta\gamma \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \beta+\gamma & \alpha\beta \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y}' = \begin{bmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$Z = |\boldsymbol{E} - \boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{E} - \mathbf{X}'| = |\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}'| = 1 + r_{1m'}r_{m'm}a^2 + (r_{m'm} + r_{1m'}a^2)r_{m2}b^2$

m' 層の深さ z_1 点からの SFG

$\boldsymbol{E}^{+}$ sources

$$\boldsymbol{E}^{-}(0^{-}) = t_{m'1}a^*_0a\,[r_{m'm},\ t_{m'm}r_{m2}t_{mm'}b^2][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^{+}_{m'/m'}\boldsymbol{P}(z_1)$$

$$= t_{m'1}a^*_0a\,[r_{m'm},\ t_{m'm}r_{m2}t_{mm'}b^2][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{X}]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^{+}_{m'/m'}\boldsymbol{P}(z_1)$$

$= t_{\mathrm{m'1}} a^*_0 a\ (r_{\mathrm{m'm}} + r_{\mathrm{m2}} b^2) \boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)/Z \qquad (2.1)$

$$\boldsymbol{E}^+(h_{\mathrm{m}}^+) = t_{\mathrm{m2}} a^*_0 t_{\mathrm{m'm}} b\ [1, \alpha][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} a^*_0 t_{\mathrm{m'm}} b\ [1, \alpha][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}]^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} a^*_0 t_{\mathrm{m'm}} b \boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)/Z \qquad (2.2)$$

$\boldsymbol{E}^-$ sources

$$\boldsymbol{E}^-(0^-) = t_{\mathrm{m'1}} a_0\ [\alpha, \beta][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m'1}} a_0\ [\alpha, \beta][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{X}]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m'1}} a_0\ (1 + r_{\mathrm{mm'}} r_{\mathrm{m2}} b^2) \boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)/Z \qquad (2.3)$$

$$\boldsymbol{E}^+\ (\mathrm{h}_{\mathrm{m}}^+) = t_{\mathrm{m2}} a_0 r_{\mathrm{m'1}} a t_{\mathrm{m'm}}\ [1, \alpha][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} a_0 r_{\mathrm{m'1}} a t_{\mathrm{m'm}}\ [1, \alpha][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}]^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} a_0 r_{\mathrm{m'}1} \mathrm{t}_{\mathrm{m'm}} a b \boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m'/m'}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1)/Z \qquad (2.4)$$

m 層の m'/m 界面から深さ z_2 の点からの SFG

$\boldsymbol{E}^+$ sources

$$\boldsymbol{E}^-(0^-) = t_{\mathrm{m'1}} b^*_0 r_{\mathrm{m2}} ab\ [t_{\mathrm{m'm}}, \gamma t_{\mathrm{m'm}}][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X}'^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{\mathrm{m'1}} b^*_0 r_{\mathrm{m2}} ab\ [t_{\mathrm{m'm}}, \gamma t_{\mathrm{m'm}}][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{X}']^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{\mathrm{m'1}} \mathrm{b}^*_0 t_{\mathrm{mm'}} \mathrm{r}_{\mathrm{m2}} ab \boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)/Z \qquad (2.5)$$

$$\boldsymbol{E}^+\ (h_{\mathrm{m}}^+) = t_{\mathrm{m2}} b^*_0 t_{\mathrm{m'm}} b\ [\gamma, \beta][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Y}' + \boldsymbol{Y}'^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} b^*_0 t_{\mathrm{m'm}} b\ [\gamma, \beta][\boldsymbol{E} - \mathrm{Y}']^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{\mathrm{m2}} b^*_0\ (1 + r_{\mathrm{1m'}} r_{\mathrm{m'm}} a^2) \boldsymbol{L}^+_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)/Z \qquad (2.6)$$

$\boldsymbol{E}^-$ sources

$$\boldsymbol{E}^-(0^-) = t_{\mathrm{m'1}} b_0\ [1, \gamma][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X}'^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{\mathrm{m'1}} b_0\ [1, \gamma][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{X}']^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{\mathrm{m/m}} \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_2)$$

$$= t_{m'1} b_0 a t_{mm'} \boldsymbol{L}^-_{m/m} \boldsymbol{P}(z_2)/Z \qquad (2.7)$$

$$\boldsymbol{E}^+(h_m^+) = t_{m2} b_0 b\,[r_{mm'},\ t_{mm'} r_{m'1} t_{m'm} a^2][\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Y}' + \boldsymbol{Y}'^2 + \cdots]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{m/m}\boldsymbol{P}(z_2)$$

$$= t_{m2} b_0 b\,[r_{mm'},\ t_{mm'} r_{m'1} t_{m'm} a^2][\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}']^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{L}^-_{m/m}\boldsymbol{P}(z_2)$$

$$= -t_{m2} b_0 b\,(r_{m'm} + r_{1m'} a^2)\,\boldsymbol{L}^-_{m/m}\boldsymbol{P}(z_2)/Z \qquad (2.8)$$

2.2. 詳論

外部に出てくる直前の光の電場振幅を考察する。

m' 層の深さ z_1 点からの SFG

光の経路には、媒質 1 から来た光が媒質 2 との界面で反射・屈折するところでチョイスが生じる。このチョイスを適切に取り入れ、$\boldsymbol{E}^+$ が$\boldsymbol{E}^-$ に反転する反射の回数が増すごとに考慮することによって、必要な表式を求めることが出来る。

生成光が最初に m'/m **界面に達したときの挙動で分類すると、**m'/m **界面での反射に対してさらに 1 回の反転を加えたときに派生する経路は下のように表される。**

$$x r_{m'm} y \Rightarrow x r_{m'm} r_{m'1} a^2 r_{m'm} y = x r_{m'm} \alpha y$$

$$x t_{m'm} r_{m2} t_{mm'} r_{m'1} a^2 b^2 r_{m'm} y = x t_{m'm} \alpha [r_{m2} t_{mm'} b^2] y \qquad (2.9)$$

また、m'/m **界面は透過して** m/2 **界面で反射したものにさらに 1 回の反転を加えたときに派生する経路は下のように表される。**

$$x' t_{m'm} y' \Rightarrow x r_{m'm} r_{m'1} a^2 t_{m'm} y' = x r_{m'm} [r_{m'1} a^2 t_{m'm}] y'$$

$$x t_{m'm} r_{m2} t_{mm'} r_{m'1} a^2 b^2 t_{m'm} y' = x t_{m'm} \beta y'$$

$$x t_{m'm} r_{m2} r_{mm'} b^2 y' = x t_{m'm} \gamma y' \qquad (2.10)$$

（まず下の具体的な例を参照した方がピンと来るかもしれない。）

よって、n 回の反転を経た光の出口直下での電場を下のように置くとき、

$$x(r_{m'm} y_n + t_{m'm} y_n') = x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$(n + 1)$ **回の反転を経た光の出口直下での電場は下のように表される。**

$$x[r_{m'm}(\alpha y_n + r_{m'1} t_{m'm} a^2 y_n') + t_{m'm}(\alpha r_{m2} t_{mm'} b^2 y_n + \beta y_n' + \gamma y_n')]$$

$$= x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} \alpha & r_{m'1} t_{m'm} a^2 \\ r_{m2} t_{mm'} b^2 \alpha & \beta + \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$$= x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} \alpha & r_{m'1}t_{m'm}a^2 \\ r_{m2}t_{mm'}b^2\alpha & \beta+\gamma \end{bmatrix}^{n+1}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

付録により、右辺の行列のべき乗がゼロに収束するときには、ネットの電場は（ゼロ次項から寄与する場合には）下のようになる。

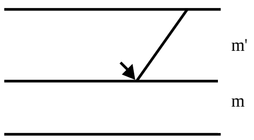
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-\alpha & -r_{m'1}t_{m'm}a^2 \\ -r_{m2}t_{mm'}b^2\alpha & 1-\beta-\gamma \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\,x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-(\beta+\gamma) & r_{m'1}t_{m'm}a^2 \\ r_{m2}t_{mm'}b^2\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

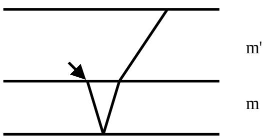
$\boldsymbol{E}^+$ sources

反射 SFG　$\boldsymbol{E}^-(0^-)$

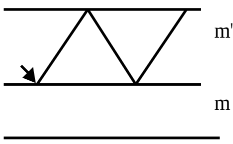
出口に達するまでに $\boldsymbol{E}^+$ が $\boldsymbol{E}^-$ に変わる反射の回数が 1 **回のものは下図の** a-1 **と** b-1 **である。反射の回数が** 2 **のものを考えるときに、生成光が最初に** m'/m **界面に達したときの挙動で分類すると、図** a-1（m'/m **界面で反射した）で示した経路からは図** a-2a **と図** a-2b **で示した経路が派生し、図** b-1（m'/m **界面は透過して** m/2 **界面で反射した）で示した経路からは図** b-2a、**図** b-2b、**図** b-2c **で示した経路が派生する。**



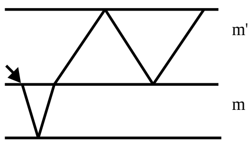
a-1: $a_0 * r_{m'm} a$



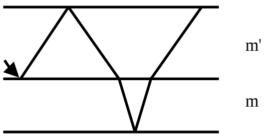
b-1: $a_0 * t_{m'm} r_{m2} t_{m'm} a b^2$



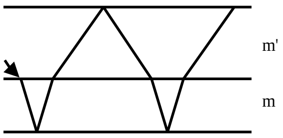
a-2a: $a_0 * r_{m'm} \alpha a$



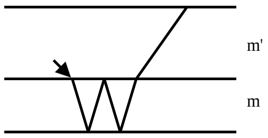
a-2b: $a_0 * t_{m'm} \alpha (r_{m2} t_{mm}' b^2) a$



b-2a: $a_0 * r_{m'm} \beta a$



b-2b: $a_0 * t_{m'm} \beta (r_{m2} t_{m'm} a b^2)$



b-2c: $a_0 * t_{m'm} \gamma (r_{m2} t_{m'm} a b^2)$

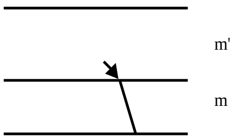
(2.11) **式を当てはめると、**$x = a_0$*、$y_0 = a$、$y_0' = r_{m2}t_{mm'}b^2a$ **に対応する。よって、**

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\, a_0^{\,*}\,(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-(\beta+\gamma) & r_{m'1}t_{m'm}a^2 \\ r_{m2}t_{mm'}b^2\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ r_{m2}t_{mm'}b^2a \end{bmatrix}$$

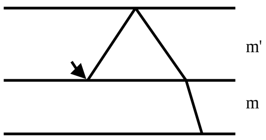
$$= \frac{r_{m'm}(1-r_{m2}r_{mm'}b^2)+r_{m2}(1+r_{mm'}r_{m'm})b^2}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\, a_0 * a$$

$$= a_0 * a\,\frac{r_{m'm}+r_{m2}b^2}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} \tag{2.12}$$

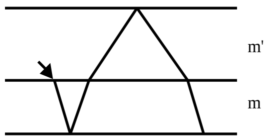
透過 SFG $\boldsymbol{E^+(h_m^+)}$



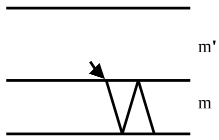
b-0: a_0*$t_{m'm}$b



b-1a: a_0*$r_{m'm}r_{m'1}a^2t_{m'm}$b



b-1b: a_0*$t_{m'm}\beta$b



b-1c: a_0*$t_{m'm}\gamma$b

(2.11) **式を当てはめると、**$x = a_0$*、$y_0 = 0$、$y_0' = b$ **に対応する。よって、**

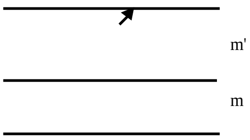
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\, a_0^{\,*}\,(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-(\beta+\gamma) & r_{m'1}t_{m'm}a^2 \\ r_{m2}t_{mm'}b^2\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{t_{m'm}}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\, a_0 * b \tag{2.13}$$

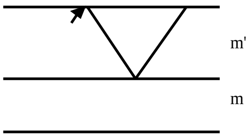
***E*$^-$ sources**

反射 SFG $\boldsymbol{E^-(0^-)}$

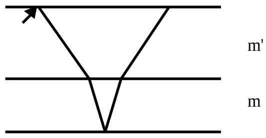
上と同様に考えると、この場合には下図に示す経路が可能である。



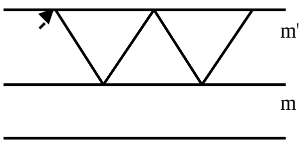
a-0: a_0



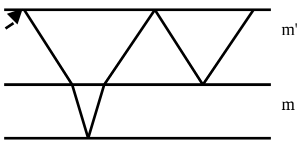
a-1: $a_0 r_{m'1} r_{m'm} a^2$



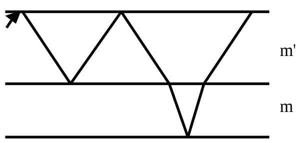
b-1: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} r_{m2} t_{m'm} b^2 a^2$



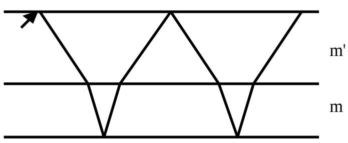
a-2a: $a_0 r_{m'1} r_{m'm} \alpha a_2$



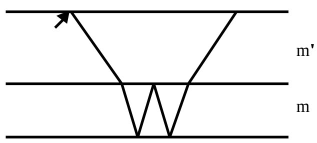
a-2b: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} \alpha (r_{m2} t_{mm'} b^2) a^2$



b-2a: $a_0 r_{m'1} r_{m'm} \beta a^2$



b-2b: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} \beta (r_{m2} t_{m'm} a^2 b^2)$



b-2c: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} \gamma (r_{m2} t_{m'm} a^2 b^2)$

この場合は、すぐ外に出る項 a_0 **と、上で示した定式に従う項が存在する。後者に対して** (2.11) **式を当てはめると、**$x = a_0 r_{m'1}$、$y_0 = a^2$、$y_0' = r_{m2} t_{mm'} a^2 b^2$ **に対応する。よって、**

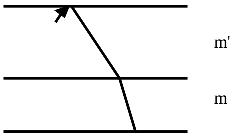
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = a_0 + \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} a_0 r_{m'1} (r_{m'm}, \quad t_{m'm}) \begin{bmatrix} 1-(\beta+\gamma) & r_{m1} t_{m'm} a^2 \\ r_{m2} t_{mm'} b^2 \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 \\ r_{m2} t_{mm'} a^2 b^2 \end{bmatrix}$$

$$= a_0 + \frac{r_{m'1} (r_{m'm} + r_{m2} b^2) a^2}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} a_0$$

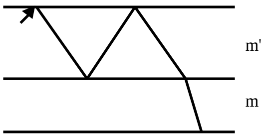
$$= \frac{1 - r_{m'm} r_{m2} b^2}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} a_0 \qquad (2.14)$$

透過 SFG $\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{h}_{\mathrm{m}}^+)$

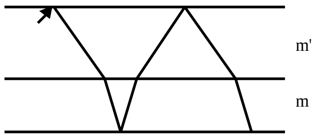
上と同様に考えると、この場合には下図に示す経路が可能である。



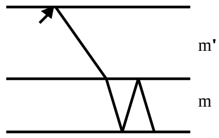
b-0: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} ab$



b-1a: $a_0 r_{m'1} r_{m'm} r_{m'1} a^2 t_{m'm} ab$



b-1b: $a_0 r_{m'1} t_{m'm} \beta ab$



b-1c: $a_0 a r_{m'1} t_{m'm} \gamma b$

(2.11) 式を当てはめると、$x = a_0 r_{m'1} a$、$y_0 = 0$、$y_0' = b$ に対応する。よって、

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} a_0 r_{m'1} (r_{m'm}, \quad t_{m'm}) \begin{bmatrix} 1-(\beta+\gamma) & r_{m'1} t_{m'm} a^2 \\ r_{m2} t_{mm'} b^2 \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{r_{m'1} t_{m'm}}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} a_0 ab \tag{2.15}$$

m 層の m'/m 界面から深さ z_2 の点からの SFG

この場合には、媒質２から来た光が媒質１との界面で反射・屈折するところでチョイスが生じる。そして、$\boldsymbol{E}^-$ が $\boldsymbol{E}^+$ に変わる反射の回数が増すごとにこれを考慮することによって、必要な表式を求めることが出来る。

上で行ったように、生成光が最初に m/m' 界面に達したときの挙動で分類すると、m/m' 界面での反射に対してさらに１回の反転を加えたときに派生する経路は下のように表される。

$$\begin{aligned} x r_{mm'} y &\Rightarrow x r_{mm'} r_{m2} b^2 r_{mm'} y = x r_{mm'} \gamma y \\ &\quad x t_{mm'} r_{m'1} t_{m'm} a^2 r_{m2} b^2 r_{mm'} y = x t_{mm'} [r_{m'1} t_{m'm} a^2] \gamma y \end{aligned} \tag{2.16}$$

また、m'/m界面は透過してm/2界面で反射したものにさらに１回の反転を加えたときに派生する経路は下のように表される。

$$\begin{aligned} x' t_{mm'} y' &\Rightarrow x r_{mm'} r_{m2} b^2 t_{mm'} y' = x r_{mm'} [r_{m2} b^2 t_{mm'}] y' \\ &\quad x t_{mm'} r_{m'1} t_{m'm} a^2 b^2 t_{mm'} r_{m2} y' = x t_{mm'} \beta y' \\ &\quad x t_{mm'} r_{m'1} r_{m'm} a^2 y' = x t_{mm'} \alpha y' \end{aligned} \tag{2.17}$$

よって、n 回の反転を経る光の出口直下での電場を下のように置くとき、

$$x(r_{\mathrm{mm'}}y_{\mathrm{n}} + t_{\mathrm{mm'}}y_{\mathrm{n}}') = x(r_{mm'},\quad t_{mm'})\begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$(n + 1)$ **回の反転を経る光の出口直下での電場は下のように表される。**

$$x[r_{\mathrm{mm'}}(\gamma y_{\mathrm{n}} + r_{\mathrm{m2}}b^2 t_{\mathrm{mm'}}y_{\mathrm{n}}') + t_{\mathrm{mm'}}(r_{\mathrm{m'1}}t_{\mathrm{m'm}}a^2\gamma y_{\mathrm{n}} + \alpha y_{\mathrm{n}}' + \beta y_{\mathrm{n}}')]$$

$$= x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} \gamma & r_{m2}t_{mm'}b^2 \\ r_{m'1}t_{m'm}a^2\gamma & \alpha + \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$$= x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} \gamma & r_{m2}t_{mm'}b^2 \\ r_{m'1}t_{m'm}a^2\gamma & \alpha + \beta \end{bmatrix}^{n+1}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

付録により、右辺の行列のべき乗がゼロに収束するときには、ネットの電場は（ゼロ次項から寄与する場合には）下のようになる。

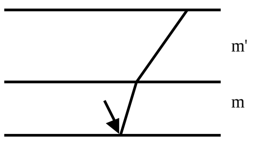
$$\mathrm{E}_{\mathrm{net}} = x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-\gamma & -r_{m2}t_{mm'}b^2 \\ -r_{m'1}t_{m'm}a^2\gamma & 1-(\alpha+\beta) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}\, x(r_{m'm},\quad t_{m'm})\begin{bmatrix} 1-(\alpha+\beta) & r_{m2}t_{mm'}b^2 \\ r_{m'1}t_{m'm}a^2\gamma & 1-\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

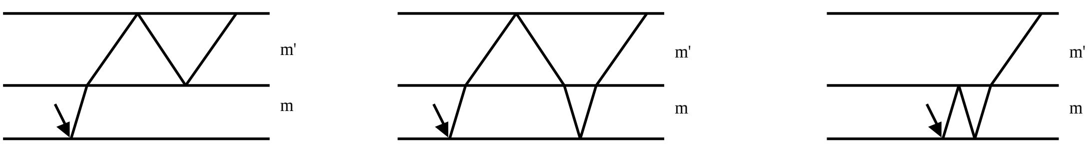
E^+ sources

反射 SFG $E^-(0^-)$

この場合には下図に示す経路が可能である。



b-0:$b_0{}^*r_{m2'}bt_{mm'}a$



b-1a: $b_0{}^*r_{m2}bt_{mm}\alpha a$　b-1b: $b_0{}^*r_{m2}bt_{mm}\beta a$　b-1c: $b_0{}^*r_{m2}br_{mm}(r_{m2}b^2t_{mm'})a$

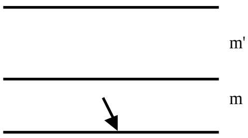
(2.18) **式を当てはめると、**$x = b_0{}^*r_{\mathrm{m2}}b$、$y_0 = 0$、$y_0' = a$ **に対応する。よって**

$$
\boldsymbol{E}_{\text{net}}=\frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}b_0*br_{m2}(r_{mm'},\quad t_{mm'})\begin{bmatrix}1-(\alpha+\beta) & r_{m2}t_{mm'}b^2\\ r_{m'1}t_{m'm}a^2\gamma & 1-\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix}
$$

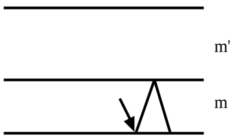
$$
=\frac{r_{m2}t_{mm'}}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma}b_0*ab \tag{2.19}
$$

透過 SFG $\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{h}_m^+)$

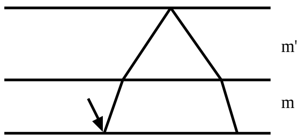
この場合には下図に示す経路が可能である。



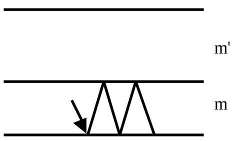
a-0: b_0*



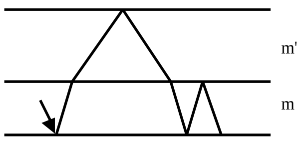
a-1: $b_0*r_{m2}r_{mm'}b^2$



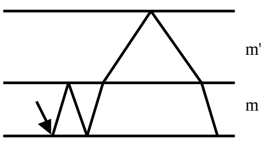
b-1: $b_0*r_{m2}t_{mm'}br_{m'1}t_{m'm}a^2b$



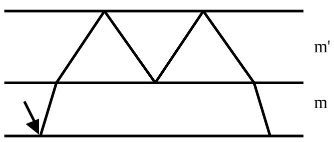
a-2a: $b_0*r_{m2}r_{mm'}b(r_{m2}r_{mm'}b^2)b$



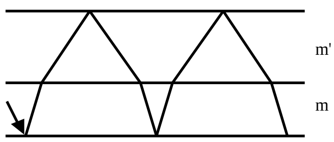
a-2b: $b_0*r_{m2}t_{mm'}b(r_{m'1}t_{m'm'}a^2\gamma)b$



b-2a: $b_0*r_{m2}r_{mm'}b\beta b$



b-2b: $b_0*r_{m2}t_{mm'}b\alpha(r_{m'1}t_{m'm}a^2)b$



b-2c: $b_0*r_{m2}t_{mm'}b\beta(r_{m'1}t_{m'm'}a^2)b$

この場合は、すぐ外に出る項 b_0* **と、上で示した定式に従う項が存在する。後者に対して** (2.18) **式を当てはめると、**$x = b_0*r_{m2}b$、$y_0 = b$、$y_0' = r_{m'1}t_{m'm}a^2b$ **に対応する。よって、**

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = b_0{*} + \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0{*}\, b r_{m2} \left(r_{mm'}, \quad t_{mm'} \right) \begin{bmatrix} 1-(\alpha+\beta) & r_{m2} t_{mm'} b^2 \\ r_{m'1} t_{m'm} a^2 \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ r_{m'1} t_{m'm} a^2 b \end{bmatrix}
$$

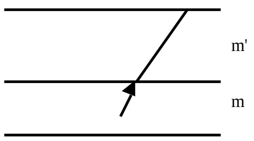
$$
= b_0{*} + \frac{b^2 r_{m2} (r_{mm'} + r_{m'1} a^2)}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0{*}
$$

$$
= \frac{(1 + r_{1m'} r_{m'm} a^2)}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0{*} \qquad (2.20)
$$

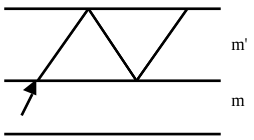
***E*⁻ sources**

反射 SFG　$E^-(0^-)$

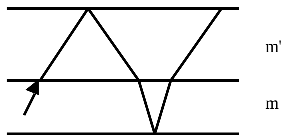
この場合には下図に示す経路が可能である。



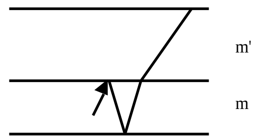
b-0:$b_0 t_{mm'} a$



b-1a: $b_0 t_{mm} \alpha a$



b-1b: $b_0 t_{mm} \beta a$



b-1c: $b_0 r_{mm} r_{m2} t_{m'm} b^2 a$

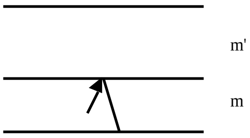
(2.18) **式を当てはめると、**$x = b_0$、$y_0 = 0$、$y_0' = a$ **に対応する。よって、**

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0 \left(r_{mm'}, \quad t_{mm'} \right) \begin{bmatrix} 1-(\alpha+\beta)) & r_{m2} t_{mm'} b^2 \\ r_{m'1} t_{m'm} a^2 \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}
$$

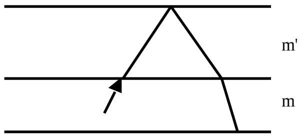
$$
= \frac{t_{mm'}}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0 a \qquad (2.21)
$$

透過 SFG　$E^+(h_m^+)$

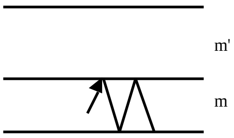
この場合には下図に示す経路が可能である。



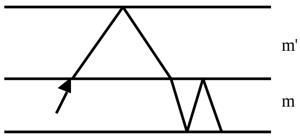
a-1: $b_0 r_{mm} b$



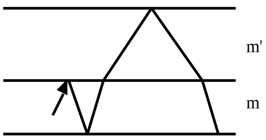
b-1: $b_0 t_{mm'} r_{m'1} t_{m'm} a^2 b$



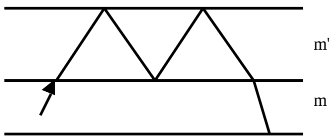
a-2a: $b_0 r_{mm'} \gamma b$



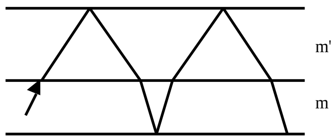
a-2b: $b_0 t_{mm'}(r_{m'1} t_{m'm} r_{m2} r_{mm'} b^2 a^2) b$



b-2a: $b_0 r_{mm'} \beta b$



b-2b: $b_0 t_{mm'}(\alpha r_{m'2} a^2) b$



b-2c: $b_0 t_{mm'} r_{m2} t_{m'm} \beta a^2 b$

(2.18) 式を当てはめると、$x = b_0$、$y_0 = b$、$y_0' = r_{m'1} t_{m'm} a^2 b$ に対応する。よって、

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{net}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0 (r_{mm'}, \quad t_{mm'}) \begin{bmatrix} 1-(\alpha+\beta) & r_{m2} t_{mm'} b^2 \\ r_{m'1} t_{m'm} a^2 \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ r_{m'1} t_{m'm} a^2 b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(r_{mm'} + r_{m'1} a^2)}{1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\gamma} b_0 b \qquad (2.22)$$

付録 A：行列の等比級数

２章で示したように、1/m'/m 系における SFG 光の取扱いに際して２次元行列の等比級数の和が出てくる。ここでは、その和の表式を求める。

単位行列を $\boldsymbol{E}$、一般の行列を $\boldsymbol{A}$ としよう。

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{A.1})$$

行列のかけ算により、次の関係式が成立することは容易に示される（右辺を展開する）。

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}) \qquad (\mathrm{A.2})$$

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^3 = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2) \qquad (\mathrm{A.3})$$

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{(n+1)} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^n) \qquad \text{(A.4)}$$

行列式 $|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ がゼロでない値を持つ、即ち、行列 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ が逆行列 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$ を持つなら、下の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{n+1}) \quad (n \geq 0) \qquad \text{(A.5)}$$

$n = 0, 1, 2$ **に対して** (A.5) **式は成立しているから、**(A.5) **式は一般的に成り立つ式である。**

行列 $\boldsymbol{A}$ の行列要素のすべてについて、絶対値が 1 **より小さいときには、行列 $\boldsymbol{A}^n$ はゼロに収束する。よって、下の公式が成り立つ。**

$$lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^n) = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \quad (\text{when } |A_{\mathrm{ij}}| < 1 \text{ for all i and j}) \qquad \text{(A.6)}$$

付録 B：2 節と 3 節の行列の関係

２節で用いた表式と３節で用いた表式では、左端及び右端のベクトルの違いにより、行列も違っている。これらが等価であることを示しておこう。

２節と３節の表式を形式的に (B.1) **式と** (B.2) **式で表そう。**

$$r'\boldsymbol{X}^n u \quad \text{（２節）} \qquad \text{(B.1)}$$
$$r\boldsymbol{Y}^n u' \quad \text{（３節）} \qquad \text{(B.2)}$$

両者を比較すると、下の関係が成り立つことがわかるであろう。

$$r' = r\boldsymbol{A}, \quad u' = \boldsymbol{A}u \qquad \text{(B.3)}$$
$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} \qquad \text{(B.4)}$$

($b/r_{\mathrm{m2}}t_{\mathrm{mm}}b^2 = r_{\mathrm{m'1}}t_{\mathrm{mm}}a^2$ **等の関係式を使う必要がある）**

(B.3) **式と** (B.4) **式を** (B.1) **式に代入すると、**

$$r'\boldsymbol{X}^n u = r\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A})\cdots(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A})u = r\boldsymbol{Y}^n\boldsymbol{A}u = r\boldsymbol{Y}^n u' \qquad \text{(B.5)}$$

よって、二つの表式が同じ結果を表していることが証明された。

q. e. d.