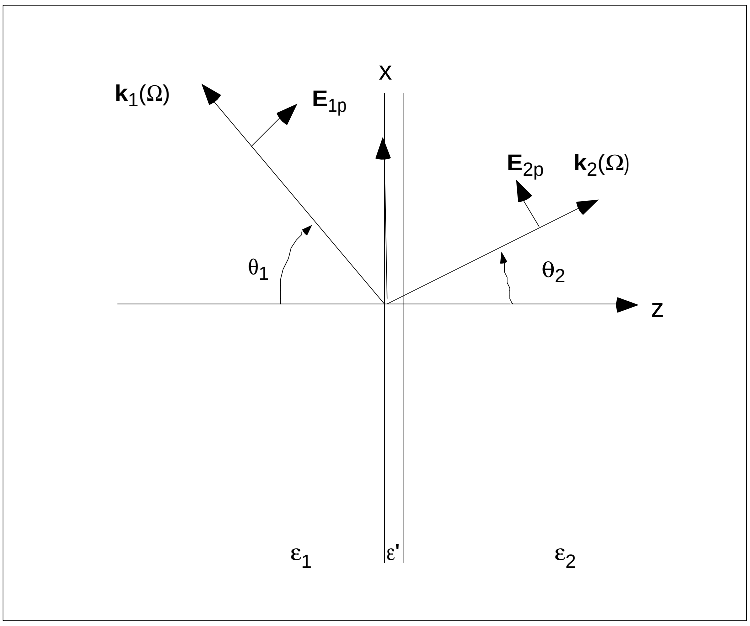
付録 A: 近似を外した形での(17)式の導出

波動ベクトルや電場ベクトルは下図のようになる。



まず、基本的な量の間の関係をまとめておこう。

$$k = (n/c)\omega, \quad \varepsilon = (c^2/\omega^2)k^2, \quad \lambda = c/\nu,$$

さて、単一周波数の光（平面波）を考えることとし、この様な場合には微分演算子 ∇ が波動ベクトル $i\boldsymbol{k}$ で置き換えられることを利用する。そうすると、電場と磁場の関係が下のようになることが (2b) 式から導かれる。

$$\boldsymbol{H} = (\omega/c)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \tag{A1}$$

$$H_x = (\omega/c)(k_y E_z - k_z E_y)$$
$$H_y = (\omega/c)(k_z E_x - k_x E_z)$$
$$H_z = (\omega/c)(k_x E_y - k_y E_x) \tag{A2}$$

電場を transverse（面内）成分と longitudinal（垂直）成分に分けて、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z\mathbf{u}_z$ と表すとき、磁場は下のようになる。

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_t + H_z\mathbf{u}_z = (\omega/c)\{\boldsymbol{k}_t \times \boldsymbol{E}_t + k_z(\mathbf{u}_z \times \boldsymbol{E}_t) + E_z(\boldsymbol{k}_t \times \mathbf{u}_z)\}$$

図のように、2 つの光線（$\boldsymbol{k}$ ベクトル）が作る面を xz 面に取り、媒質 1 から媒質 2 に向けて界面に立てた法線を z 軸にする。（原点は、界面上の光の発生点とする。）この時、$k_{1z} < 0$, $k_{2z} > 0$ である。p 偏光の電場ベクトル $\boldsymbol{E}_p$ の向きの取り方には 180° の任意性があるが、我々は図のように取るので、$E_{1z} > 0$、$E_{2z} < 0$ である。また、下の関係を覚えておこう。

$$\varepsilon = (c^2/\omega^2)k^2 \tag{A3}$$

上に示した関係式を使って (12a) ~ (12d) 式を書き変えると下の結果になる。

本文の (12a) 式より、

$$\varepsilon_2 E_{z2} - \varepsilon_1 E_{z1} = -4\pi i \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{P}_{s,t} = -4\pi i (k_x P_{s,x} + k_y P_{s,y}) \tag{A4a}$$

同じく (12b) 式より、

$\boldsymbol{E}_{t2} - \boldsymbol{E}_{t1} = -(4\pi i/\varepsilon')P_{s,z}\boldsymbol{k}_t,$　　即ち、

$$E_{x2} - E_{x1} = -(4\pi i/\varepsilon')k_x P_{s,z} \tag{A4b}$$

$$E_{y2} - E_{y1} = -(4\pi i/\varepsilon')k_y P_{s,z} \tag{A4c}$$

同じく (12c) 式より、

$(k_x E_{y2} - k_y E_{x2}) - (k_x E_{y1} - k_y E_{x1}) = 0,$　　即ち、

$$k_x(E_{y2} - E_{y1}) = k_y(E_{x2} - E_{x1}) \tag{A4d}$$

同じく (12d) 式より、

$(c/\omega)[(k_{z1}E_{y1} - k_{z2}E_{y2}) + k_y(E_{z2} - E_{z1})] = -(\omega/c)4\pi i P_{s,y}$

$(c/\omega)[(k_{z2}E_{x2} - k_{z1}E_{x1}) - k_x(E_{z2} - E_{z1})] = +(\omega/c)4\pi i P_{s,x},$　　即ち、

$$(k_{z1}E_{y1} - k_{z2}E_{y2}) + k_y(E_{z2} - E_{z1}) = -4\pi i(\omega/c)^2 P_{s,y} \tag{A4e}$$

$$-(k_{z2}E_{x2} - k_{z1}E_{x1}) + k_x(E_{z2} - E_{z1}) = -4\pi i(\omega/c)^2 P_{s,x} \tag{A4f}$$

なお、$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$、$\boldsymbol{k}_s$ の x 成分および y 成分は界面の両側で等しい値を持つ。さらに、ここで考えているように 2 つの励起光の入射面を一致させる場合には、$k_y = 0$ となるように座標系を選ぶことが出来る。

(A4d) 式は (A4b) 式と (A4c) 式から導くことができ、(A4a) 式は (A4e) 式と (A4f) 式から導くことができるので、上の 6 個の式のうち独立なものは 4 つである。なお、後者の導出は、(A4e) $\times k_y$ + (A4f) $\times k_x$ に対して、$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{E}_i = 0$ と $k_i^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_i$ を加味する。

ベクトル $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ が xz 面となす角を τ_1、τ_2 とする。（ k 軸まわりの回転で xz 面を $\boldsymbol{E}$ に重ねる方向を正方向と定義する。）

$$E_{1p} = E_1\cos\tau_1, \quad E_{2p} = E_2\cos\tau_2$$

$$E_{1s} = E_1\sin\tau_1, \quad E_{2s} = E_2\sin\tau_2 \tag{A5}$$

今考えている媒質は均一であるから、波動も homogeneous で、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は直交する。$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ の座標成分を角 θ_1、θ_2 で表すと、

$$\begin{aligned}
E_{x1} &= E_{1p}\cos\theta_1, \quad E_{x2} = E_{2p}\cos\theta_2 \\
E_{y1} &= E_{1s}, \quad E_{y2} = E_{2s} \\
E_{z1} &= E_{1p}\sin\theta_1, \quad E_{z2} = E_{2p}\sin\theta_2 \\
k_x &= k_{x1} = k_{x2} = k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2
\end{aligned} \tag{A6}$$

$k_y = k_{y1} = k_{y2} = 0$

$k_{1z} = -k_1\cos\theta_1, \quad k_{2z} = +k_2\cos\theta$ (A7)

(A4a) ~ (A4f) 式に (A6) 式と (A7) 式を代入して下式を得る。

$\varepsilon_2 E_{2p}\sin\theta_2 + \varepsilon_1 E_{1p}\sin\theta_1 = 4\pi i(k_x P_{s,x} + k_y P_{s,y}) = 4\pi i k_x P_{s,x}$ (A8a)

$\varepsilon'(E_{2p}\cos\theta_2 - E_{1p}\cos\theta_1) = -4\pi i k_x P_{s,z}$ (A8b)

$\varepsilon'(E_{2s} - E_{1s}) = -4\pi i k_y P_{s,z} = 0$ (A8c)

$k_x(E_{2s} - E_{1s}) = k_y(E_{2p}\cos\theta_2 - E_{1p}\cos\theta_1) = 0$ (A8d)

$k_y(E_{2p}\sin\theta_2 + E_{1p}\sin\theta_1) + (k_{2z}E_{2s} - k_{1z}E_{1s}) = k_{2z}E_{2s} - k_{1z}E_{1s} = 4\pi i(\omega^2/c^2)P_{s,y}$ (A8e)

$k_x(E_{2p}\sin\theta_2 + E_{1p}\sin\theta_1) + (k_{2z}E_{2p}\cos\theta_2 - k_{1z}E_{1p}\cos\theta_1) = 4\pi i(\omega^2/c^2)P_{s,x}$ (A8f)

(A8a) 式と (A8b) 式から、$\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2 = (c^2/\omega^2)(k_1\cos\theta_2 + k_2\cos\theta_1)$ の関係を使って、下を得る。

$$E_{2p} = 4\pi i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\cos\theta_1[P_{s,x} + (k_y/k_x)P_{s,y}] - (\varepsilon_1/\varepsilon')sin\theta_1 P_{s,z}}{k_1\cos\theta_2 + k_2\cos\theta_1} \quad \text{(A9a)}$$

$$E_{1p} = 4\pi i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\cos\theta_2[P_{s,x} + (k_y/k_x)P_{s,y}] + (\varepsilon_2/\varepsilon')sin\theta_2 P_{s,z}}{k_1\cos\theta_2 + k_2\cos\theta_1} \quad \text{(A9b)}$$

この結果は、通常の光の反射では反射率がゼロになる $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon'$ のときでも SFG 光は生成し、かつ、$|E_{1p}| \neq |E_{2p}|$ であることを示している。

(A8c) 式、((A9a) 式、(A9b) 式を (A8e) 式に代入すると下を得る。

$$E_{2s} = E_{1s} = 4\pi i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{P_{s,y}}{k_{2z} - k_{1z}} = 4\pi i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{P_{s,y}}{k_1\cos\theta_1 + k_2\cos\theta_2} \quad \text{(A10)}$$

本文の (17) 式は、(A9) 式と (A10) 式に $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon' = 1$ の条件を加えると満足されることを示すことが出来る。（$k_1 = k_2$、$\theta_1 = \theta_2$ になるところがみそである。）