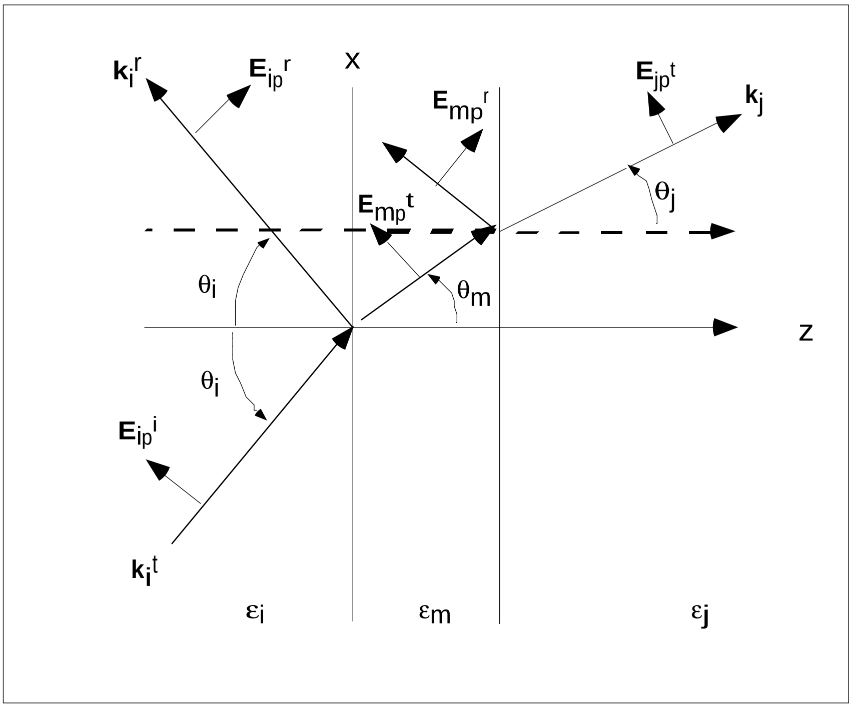
付録 B：(20)式の導出

バルクは等方的であるとするから、膜内部の電場も波動ベクトルに垂直である。入射側には入射光と反射光があり、透過側には透過光しかない。入射側では、入射等と反射光を上付き i と r で区別して、電場を $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{r}}$、磁場を $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{r}}$ と表す。透過光については電場を $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}$、磁場を $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}$ と表すが、膜の内部では透過光と反射光の両方があるので、電場を $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{r}}$、磁場を $\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{r}}$ と表す。（但し、膜の内部では多重反射もあり得るので、入射側から透過側に向かう光に上付き t を付け、反対に入射側に戻る光に上付き r を付けると表現する方が厳密である。）

さて、それぞれの光に対して　$\boldsymbol{H} = (c/\omega)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$　であり、また、$k_y = 0$ 選んでいるから、下の関係が成り立つ。

$$H_x = -(c/\omega)k_z E_y$$
$$H_y = (c/\omega)(k_z E_x - k_x E_z)$$
$$H_z = (c/\omega)k_x E_y \tag{B1}$$

光路及び電場ベクトルを下図のように取ることにする。



s 偏光と p 偏光に分けて線形光学における界面での連続条件をあてはめると、以下の結果が得られる。

［s 偏光］

E_y：　$E_{iy}^{\ i} + E_{iy}^{\ r} = E_{my}^{\ t} + E_{my}^{\ r} = E_{jy}^{\ t}$ (B2a)

H_z：　$k_x(E_{iy}^{\ i} + E_{iy}^{\ r}) = k_x(E_{my}^{\ t} + E_{my}^{\ r}) = k_x E_{jy}^{\ t}$ (B2b)

H_x：　$k_{iz}(E_{iy}^{\ i} - E_{iy}^{\ r}) = k_{mz}(E_{my}^{\ t} - E_{my}^{\ r}) = k_{jz} E_{jy}^{\ t}$ (B2c)

（但し、$k_{iz}^{\ i} = -k_{iz}^{\ r} = k_{iz}$ とした。）

(B2a) 式と (B2b) 式は等価である。(B2a) 式と (B2c) 式より下を得る。

$$E_{jy}{}^{t} = E_{my}{}^{t} + E_{my}{}^{r} = [2k_{iz}/(k_{iz} + k_{jz})]E_{iy}{}^{i} \qquad \text{(B3a)}$$
$$E_{jy}{}^{r} = [(k_{iz} - k_{jz})/(k_{iz} + k_{jz})]E_{iy}{}^{i} \qquad \text{(B3b)}$$

［p 偏光］

$$E_x\text{：}\quad E_{ix}{}^{i} + E_{ix}{}^{r} = E_{mx}{}^{t} + E_{mx}{}^{r} = E_{jx}{}^{t} \qquad \text{(B4a)}$$
$$E_z\text{：}\quad \varepsilon_i(E_{iz}{}^{i} + E_{iz}{}^{r}) = \varepsilon'(E_{mz}{}^{t} + E_{mz}{}^{r}) = \varepsilon_j E_{jz}{}^{t} \qquad \text{(B4b)}$$
$$H_y\text{：}\quad k_{iz}(E_{ix}{}^{i} - E_{ix}{}^{r}) - k_x(E_{iz}{}^{i} + E_{iz}{}^{r}) = k_{mz}(E_{mx}{}^{t} - E_{mx}{}^{r}) - k_x(E_{mz}{}^{t} + E_{mz}{}^{r})$$
$$= k_{jz}E_{jx}{}^{t} - k_xE_{jz}{}^{t} \qquad \text{(B4c)}$$

(B4c) 式は (B4a) 式と (B4b)式から導くことが出来るので、(B4a) 式と (B4b) 式だけから必要な関係式を得ることが出来る。上の解を求めるに当たって、下の関係式を (B4a) 式と (B4b) 式に代入して E_x と E_z を E_p で表す。

$$E_{mx}{}^{i} = E_{mp}{}^{i}\cos\theta_m, \quad E_{mx}{}^{r} = E_{mp}{}^{r}\cos\theta_m$$
$$E_{ix}{}^{i} = E_{ip}{}^{i}\cos\theta_i, \quad E_{ix}{}^{r} = E_{ip}{}^{r}\cos\theta_i$$
$$E_{jx}{}^{t} = E_{jp}{}^{t}\cos\theta_j,$$
$$E_{mz}{}^{i} = -E_{mp}{}^{i}\sin\theta_m, \quad E_{mz}{}^{r} = +E_{mp}{}^{r}\sin\theta_m$$
$$E_{iz}{}^{i} = -E_{ip}{}^{i}\sin\theta_i, \quad E_{iz}{}^{r} = +E_{ip}{}^{r}\sin\theta_i$$
$$E_{jz}{}^{t} = -E_{jp}{}^{t}\sin\theta_j,$$

また、

$$k_x = k_i\sin\theta_i = k_m\sin\theta_m = k_j\sin\theta_j$$
$$k_{iz} = k_i\cos\theta_i, \quad k_{mz} = k_m\cos\theta_m, \quad k_{jz} = k_j\cos\theta_j$$
$$k = (\omega\ /c)\sqrt{\varepsilon}$$

である。まず、下の関係が導かれる。

$$E_{jp}{}^{t} = \frac{2\varepsilon_i k_j \cos\theta_i}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{ip}{}^{i}$$
$$E_{ip}{}^{r} = \frac{\varepsilon_i k_{jz} - \varepsilon_j k_{iz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{ip}{}^{i} \qquad \text{(B5)}$$

よって、

$$E_{jx}{}^{t} = \frac{2\varepsilon_i k_{jz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} (E_{ip}{}^{i}\cos\theta_i)$$
$$E_{jz}{}^{t} = -\frac{2\varepsilon_i k_j \sin\theta_j \cos\theta_i}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{ip}{}^{i} = -\frac{2\varepsilon_i k_i \sin\theta_i \cos\theta_i}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{ip}{}^{i} \qquad \text{(B6)}$$
$$= \frac{2\varepsilon_i k_{iz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} (-E_{ip}{}^{i}\sin\theta_i)$$

一方、$E_{mx} = E_{mx}{}^{t} + E_{mx}{}^{r}$,　$E_{mz} = E_{mz}{}^{t} + E_{mz}{}^{r}$　と置くと、

$E_{mx} = E_j^{xt}$,　$E_{mz} = (\varepsilon_j/\varepsilon')\ E_{jz}^{t}$ (B7)

よって、

$$E_{mx} = E_{mx}{}^{t} + E_{mx}{}^{r} = \frac{2\varepsilon_i k_{jz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{ix}{}^{i} = \frac{2\varepsilon_i q_j}{\varepsilon_j q_i + \varepsilon_i q_j} E_{ix}{}^{i}$$
$$E_{mz} = E_{mz}{}^{t} + E_{mz}{}^{r} = \frac{2\varepsilon_i k_{iz}(\varepsilon_j/\varepsilon')}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}} E_{iz}{}^{i} = \frac{2(\varepsilon_i\varepsilon_j/\varepsilon')k_{iz}}{\varepsilon_j q_i + \varepsilon_i q_j} E_{iz}{}^{i} \tag{B8}$$

因みに、Born & Wolf の教科書の 1.6.4 節の示されているように、媒質 1 と媒質 2 の間に厚さ b の膜がある時に、媒質 1 側から入射する光に対する振幅反射率 r と振幅透過率 t は下式のように表される。

$$r = \frac{r_{im} + r_{mj} e^{2i\beta}}{1 + r_{im} r_{mj} e^{2i\beta}}, \qquad t = \frac{t_{im} t_{mj} e^{i\beta}}{1 + r_{im} r_{mj} e^{2i\beta}}$$

上式で、$\beta = b\ k_{mz} = b\ (2\pi/\lambda)\ n_m \cos\theta_m$ である。 β がゼロの極限では、上で求めた結果と一致することがわかる。

　なお、(B4a) 式と (B4b) 式から導かれる下の関係式は何かの折に有用であろう。

$$(E_{ip}{}^{i} + E_{ip}{}^{r})\cos\theta_i = (E_{mp}{}^{t} + E_{mp}{}^{r})\cos\theta_m = E_{jp}\cos\theta_j$$
$$\varepsilon_i(-E_{ip}{}^{i} + E_{ip}{}^{r})\sin\theta_i = \varepsilon'(-E_{mp}{}^{t} + E_{mp}{}^{r})\sin\theta_m = -\varepsilon_j E_{jp}\sin\theta_j$$